

04-04 Théorème de Gauss**Théorème**

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls avec a et b premiers entre eux.

Si a divise bc alors a divise c .

Exemple

10 et 21 sont premiers entre eux. Si 10 divise $21c$ alors cela signifie que 10 divise c .

Démonstration

Soient a et b premiers entre eux tels que a divise bc . Il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Il existe donc deux entiers u et v tels que $auc + bvc = c$. Comme a divise à la fois auc et bvc alors a divise c .

Méthode

Résolution de l'équation $7x = 11y$ avec x et y des entiers relatifs.

- Si $7x = 11y$ alors 11 divise $7x$.
Comme 7 et 11 sont premiers entre eux alors 11 divise x .
Il existe un entier k tel que $x = 11k$. On a alors $7 \times 11k = 11y$ d'où $y = 7k$.
- Réciproquement, tout couple de la forme $(11k ; 7k)$ est solution de $7x = 11y$.
- Conclusion : $S = \{ (11k ; 7k) / k \in \mathbb{Z} \}$

Propriété

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls avec b et c premiers entre eux.

Si b et c divisent a alors bc divise a .

Exemple

Si un nombre a est divisible à la fois par 10 et 21 (premiers entre eux) alors a est divisible par 210.

Démonstration

Il existe k et k' tels que $a = kb$ et $a = k'c$ Donc $kb = k'c$ et d'après le théorème de Gauss b divise k' .

Il existe donc k'' tel que $k' = k''b$. On a alors $a = k''bc$ d'où bc divise a .

04-04 Applications du cours**Application 1**

a et b sont des entiers relatifs non nuls.

1. Si 5 divise $7a$, que peut-on affirmer concernant a ?
2. Si $11a = 12b$, que peut-on affirmer concernant a et b ?
3. Si $9b \equiv 0 [7]$, que peut-on affirmer concernant b ?

Application 2

n est un entier naturel.

Le produit $(n^2 - n)(2n - 1)$ est-il forcément divisible par 6 ?

Application 3

Démontrer la proposition 32 du Livre VII des *Éléments* d'Euclide, appelée aussi **lemme d'Euclide** :

« Soient b et c deux entiers. Si un nombre premier p divise le produit bc , alors p divise b ou c ».

Application 4

1. **a]** Déterminer tous les couples d'entiers $(x ; y)$ vérifiant $8x = 13y$.
b] Déterminer un couple de solutions de l'équation $8x - 13y = 5$.
c] Dédire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation $8x - 13y = 5$.
*Cette équation à coefficients entiers et à solutions entières est appelée **équation diophantienne**.*
2. Résoudre l'équation $15x + 28y = 11$.

Application 5

1. Les racines d'un polynôme sont-elles toujours des nombres rationnels ?
2. On considère l'équation $7x^3 + 12x^2 + 17x - 6 = 0$.
a] À l'aide d'une calculatrice graphique, conjecturer le nombre de solutions de cette équation. Préciser leur valeur approchée éventuelle.
b] On suppose qu'il existe une solution rationnelle de la forme p/q avec p et q premiers entre eux. Déterminer deux conditions que doivent vérifier p et q .
*Ces deux conditions portent le nom de **critère d'Eisenstein**.*
c] Conclure.